Funciones Continuas

Continuidad

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se dice que f es continua en a cuando:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \left.\begin{array}{c} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Se dice que f es continua en un conjunto $C \subset A$, si f es continua en todo punto de C.

Observación importante

Observa que en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.

Propiedades básicas

Las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

La función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Las funciones racionales son continuas en su dominio natural de definición.

Continuidad de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $b = f(a) \in B$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

Las funciones elementales son continuas en su dominio natural de definición.

Propiedades locales

Teorema de localización. Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción de f a I es continua en I.

Conservación local del signo. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)$ tiene igual signo que $f(a)$, es decir $f(x) f(a) > 0$.

Ejercicio

Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Teorema de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Teorema del valor intermedio

La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

- Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
- Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
- Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.
- Da un ejemplo de una función continua en $[0, 1[$ tal que $f([0, 1[)$ no sea acotado.
- Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I, que es lo que queríamos probar.

Ejercicio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Ejercicio

Prueba que la ecuación $x + e^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Ejercicio

Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

Ejercicio

Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuestra que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

Ejercicio

Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ verificando que $f(a) = a$.

Algunas consecuencias del teorema de Bolzano

Existencia de raíces

Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Ceros de polinomios de grado impar

Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

Continuidad y monotonía

Una función monótona en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.

Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona y su inversa es continua.

Ejercicio

Justifica que, dado $x \in \mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifica que la función $x \mapsto \varphi(x)$, $(x \in \mathbb{R})$, así definida es continua.

Mayorantes y minorantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales. Un número $z\in\mathbb{R}$ se dice que es un **mayorante o cota superior** (resp. **minorante o cota inferior**) de E si $x \leqslant z$ (resp. $z \leqslant x$) para todo $x\in E$.

Un conjunto que tiene algún mayorante (resp. minorante) se dice que está **mayorado o acotado superiormente** (resp. **minorado o acotado inferiormente**). Un conjunto que está mayorado y minorado se dice que está **acotado**.

Máximo y mínimo

Si hay algún elemento de E que también sea mayorante (resp. minorante) de E, dicho elemento es necesariamente único y se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de E y lo representaremos por $\max(E)$ (resp. $\min(E)$).

Propiedad del supremo (es un axioma)

Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Propiedad del ínfimo

Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Extremos superior e inferior

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, se llama **supremo o extremo superior** de E, al mínimo mayorante de E y lo notaremos por $\sup(E)$.

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, no vacío y minorado, se llama **ínfimo o extremo inferior** de E, al máximo minorante de E y lo notaremos por $\inf(E)$.

Extremos absolutos

Sea $f : B \to \mathbb{R}$. Se dice que f está mayorada (resp. minorada) en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado (resp. minorado). Se dice que f *está acotada* en B si el conjunto $f(B)$ está acotado. Se dice que f alcanza en B un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(B)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $v \in B$ (resp. $u \in B$) tal que $f(x) \leqslant f(v)$ (resp. $f(u) \leqslant f(x)$) para todo $x \in B$.

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Equivalentemente, la imagen por una función continua f de un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es también un intervalo cerrado y acotado $f\big([a, b]\big) = [m, M]$.

Una consecuencia del teorema de Weierstrass

Una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

Ejercicio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x \in [a,b]$ hay algún $y \in [a,b]$ tal que $|f(y)| \leqslant \frac{2}{10}|f(x)|$. Prueba que f se anula en algún punto de $[a,b]$.

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Límite por la derecha

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

Límite por la izquierda

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de f en a** y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \beta$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = L$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales)

Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales)

Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty.$

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} x > K \\ \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.

- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\ \lim_{x\to a} g(x)$$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iv) Supongamos que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$ y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

La continuidad permuta con el paso al límite

Si g es continua en el punto $L = \lim_{x \to a} f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(L)$. Simbólicamente:

$$\boxed{\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x))}$$

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Discontinuidades de las funciones monótonas

Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \iff \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log L$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = -\infty$.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$

- Las potencias positivas decrecen hacia 0 más rápidamente que los logaritmos.

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big|\log|x|\big|^{\mu} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$

- Las exponenciales positivas crecen más rápidamente que las potencias.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu > 0.$$

Indeterminaciones en el cálculo de límites

$$\infty - \infty$$

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f + g$, fg, no está determinado por el de f y g. Por ejemplo, si sabemos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f + g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim_{x \to a} (f + g)(x)$ donde $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo "$\infty - \infty$"**.

$$0\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$"**. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

$$1^{\infty},\ \infty^0,\ 0^0$$

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^{∞}")

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^0")

Ejercicio

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

Ejercicio

Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = L$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to-\infty} f(1/x) = L$$

Ejercicio

Sea $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \in]0,1[$ por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & , \text{ si } x < 0 \\ x & , \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & , \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

Ejercicio

Supongamos que $a < 0 < b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dadas para todo $x \neq 0$ por :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x}, \qquad g(x) = x f(x).$$

Ejercicio

Determina la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log|x|)$.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}.$$

Estudia la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no nula tal que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Prueba que si f toma algún valor positivo entonces f alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.